02.02. Circuitos de corriente alterna

Damián Gulich[1,2]

[1]Departamento de Ciencias Básicas,
Facultad de Ingeniería, UNLP

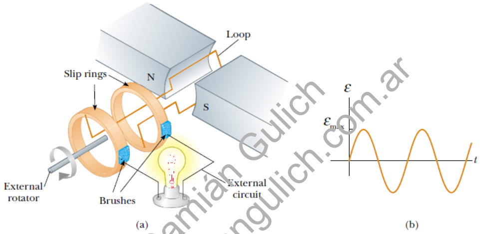
[2]Centro de Investigaciones Ópticas (CIOp)

Índice

Corriente alterna

- Cada vez que encendemos un televisor, un estéreo o cualquiera de una multitud de otros aparatos eléctricos, estamos llamando a corrientes alternas para proporcionar la energía para operarlos.
- Comenzamos nuestro estudio investigando las características de los circuitos en serie simples que contienen resistencias, inductores y condensadores y que son controlados por un voltaje sinusoidal.
- Encontraremos que la corriente alterna máxima en cada elemento es proporcional a la tensión alterna máxima a través del elemento. También encontraremos que cuando el voltaje aplicado es sinusoidal, la corriente en cada elemento también es sinusoidal, pero no necesariamente en fase con la tensión aplicada.

Fuentes de corriente alterna



En la clase sobre Faraday-Lenz discutimos el funcionamiento del generador de corriente alterna. En ese caso la fem inducida es de la forma

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen}(\omega t) \quad (1)$$

donde $\mathcal{E}_0$ es la máxima tensión (en V) y ω es la frecuencia angular (rad/s) y

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

donde f (Hz) es la frecuencia del generador (fuente) y T es el período.

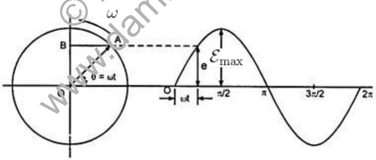
La forma circuital de representar a esta fuente es con el símbolo: 

Fasores

- Trabajaremos con el comportamiento de resistencias, capacitores e inductancias sometidos a fems alternas. Se podría hacer un tratamiento muy engorroso de la regla de las mallas con identidades trigonométricas, pero emplearemos el *método de los fasores*, que es mucho más sencillo.
- El método de los fasores consiste en imaginar que la forma (1)

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen}(\omega t) \quad (2)$$

(que es lo que se puede medir con un osciloscopio) es la proyección sobre el eje vertical de un vector (fasor) de amplitud $\mathcal{E}_0$ que gira hacia la izquierda con velocidad angular ω.

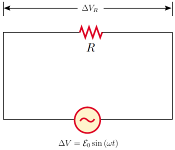


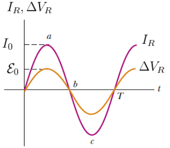
- El fasor de cada elemento circuital tendrá características propias.
- El tratamiento se hará sumando fasores y el resultado final será la proyección sobre el eje vertical (que es lo que se puede medir con un osciloscopio).

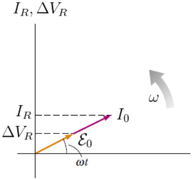
Fasores (2)

En esta clase vamos a comparar el comportamiento de una resistencia, una inductancia y un capacitor respecto a la corriente, que será nuestra referencia. Esto nos será de utilidad para analizar el circuitos en serie en régimen de corriente alterna.

Una resistencia en corriente alterna







- Por la regla de las mallas $\Delta V - \Delta V_R = 0$, por lo que $\Delta V = \Delta V_R = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, donde ΔV_R es la tensión instantánea entre los bornes de la resistencia.
- Por la Ley de Ohm, $(R = V/I)$, podemos hallar la corriente instantánea que atraviesa la resistencia:

$$I_R(t) = \frac{\Delta V_R}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \operatorname{sen}(\omega t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t) \qquad (3)$$

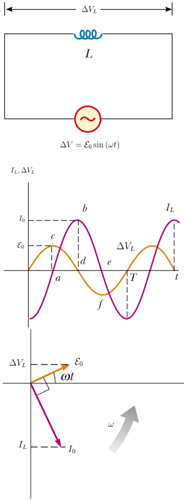
donde $I_0 = \mathcal{E}_0 / R$ es la corriente máxima.

- El resultado (3) puede entenderse en términos de fasores: el fasor de $\mathcal{E}(t)$ (la fuente) gira superpuesto con el de $I_R(t)$.

Resistencia en corriente alterna

En un circuito de CA resistivo, la caída de potencial (tensión) sobre la resistencia está en fase con la corriente que la atraviesa.

Una inductancia en corriente alterna



- Por la regla de las mallas $\Delta V + \Delta V_L = 0$ y en una inductancia sabemos que $\Delta V_L = -L\, dI/dt$, por lo que, por (1):

$$\Delta V - L\frac{dI}{dt} = 0$$

de donde $dI = \frac{\Delta V}{L}\, dt = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \operatorname{sen}(\omega t)\, dt$ por lo que la corriente es

$$I(t) = \int dI = -\frac{\mathcal{E}_0}{\omega L}\cos(\omega t) = I_0 \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (4)$$

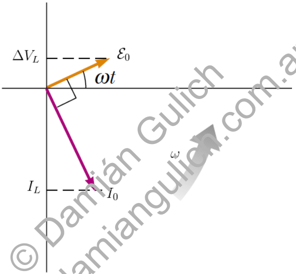
donde se utilizó que $\cos(\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha - \pi/2)$ y que $I_0 = \mathcal{E}_0/X_L$ donde la *reactancia inductiva* X_L (en Ω) es

$$X_L = \omega L \qquad (5)$$

- La diferencia de potencial en la inductancia es , por (4):

$$\Delta V_L = -L\frac{dI}{dt} = -I_0 X_L \operatorname{sen}(\omega t) \qquad (6)$$

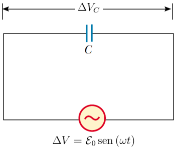
Una inductancia en corriente alterna (2)

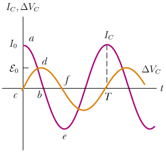


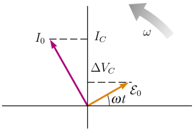
Inductancia en corriente alterna

En un circuito de CA inductivo, la caída de potencial (tensión) sobre la inductancia adelanta 90º con respecto a la corriente que lo atraviesa.

Un capacitor en corriente alterna







- Por la regla de las mallas $\Delta V - \Delta V_C = 0$, por lo que, por (1):
$$\Delta V = \Delta V_C = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$
- En los capacitores sabemos que $q = C\Delta V$ y para hallar la corriente, recurrimos a $I = dq/dt$:

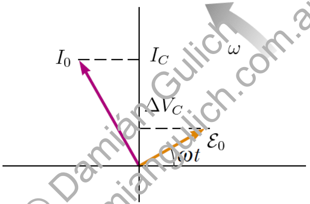
$$\begin{aligned} i_C &= \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} C\mathcal{E}_0 \operatorname{sen}(\omega t) = \omega C \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \\ &= I_0 \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

donde se utilizó que $\cos(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha + \pi/2)$ y que $I_0 = \mathcal{E}_0 / X_C$ donde

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (8)$$

es la *reactancia capacitiva* (Ω).

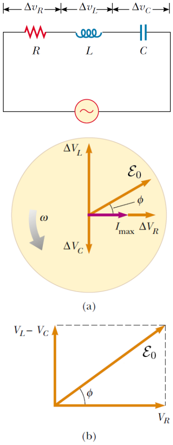
Un capacitor en corriente alterna (2)



Capacitor en corriente alterna

En un circuito de CA capacitivo, la caída de potencial (tensión) sobre el capacitor se atrasa 90º con respecto a la corriente que lo atraviesa.

Circuito RLC serie



- Como no hay nodos, la corriente es única: es la misma para los 3 elementos R C L. Si la fem aplicada es senoidal de frecuencia angular ω, esperamos que la corriente tenga la misma frecuencia, pero con valor máximo y desfasaje desconocidos respecto a la tensión:

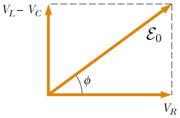
$$I(t) = I_0 \ \mathrm{sen}\,(\omega t - \phi) \tag{9}$$

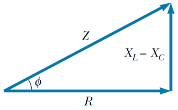
- Por la regla de las mallas $\Delta V = \Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C$ donde todos son fasores que giran con la misma frecuencia ω. Esto debe mantenerse en todo momento.
- Para los valores máximos de cada fasor (largo de cada flecha) se cumple que

$$V_R = I_0 R$$
$$V_C = I_0 X_C$$
$$V_L = I_0 X_L$$

y sabemos que V_L se adelanta 90° a V_R mientras que V_C se atrasa 90° respecto a V_R.

Circuito RLC serie (2)





- De la figura

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0^2 &= V_R^2 + (V_L - V_C)^2 \\ &= (I_0 R)^2 + (I_0 X_L - I_0 X_C)^2\end{aligned}$$

de donde finalmente

$$\mathcal{E}_0 = I_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_0 Z \qquad (10)$$

donde definimos la impedancia Z (en unidades Ω) del circuito

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (11)$$

- Finalmente, el ángulo se encuentra con

$$\tan(\phi) = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad (12)$$

Circuito RLC serie - Frecuencia de resonancia

En términos de la frecuencia ω, la impedancia (11) es

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{13}$$

¿Cuándo se da el mínimo valor de Z? Cuando $X_L = X_C$, es decir: $\omega L = 1/\omega C$ de donde la frecuencia de resonancia es

$$\omega_{\text{resonancia}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{14}$$

Además, en esta frecuencia por (12) $\tan(\phi) = 0$ por lo que $\phi = 0$. Es decir: en resonancia la tensión y la corriente están en fase.

Potencia en circuitos de corriente alterna

La potencia instantanea en un circuito es $P(t) = \mathcal{E}(t)\, I(t)$. Sabidas las expresiones correspondientes (2) y (9):

$$\begin{aligned} P(t) &= \mathcal{E}_0 \operatorname{sen}(\omega t)\, I_0 \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \\ &= \mathcal{E}_0 I_0 \left[\operatorname{sen}^2(\omega t)\cos(\phi) - \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t)\operatorname{sen}(\phi)\right] \end{aligned}$$

estamos interesados en el promedio temporal de $P(t)$: aunque la corriente circule en ambos sentidos, cada vez que atraviesa R genera efecto Joule:

$$\begin{aligned} \langle P(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\, dt \\ &= \mathcal{E}_0 I_0 \left[\left\langle \operatorname{sen}^2(\omega t)\right\rangle \cos(\phi) - \langle \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t)\rangle \operatorname{sen}(\phi)\right] \\ &= \mathcal{E}_0 I_0 \left[\frac{1}{2}\cos(\phi) - 0 \operatorname{sen}(\phi)\right] \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\mathcal{E}_0 I_0 \cos(\phi)} \qquad (15) \end{aligned}$$

Valores medibles con un multímetro (eficaz)

En corriente alterna la frecuencia ω puede ser alta, y sólo un osciloscopio puede medir los valores instantáneos de (1) o (3).
En general se mide con un multímetro, que sólo es capaz de medir el valor medio eficaz (rms), por ejemplo para la corriente es I_{eficaz}

$$\begin{aligned} I_{\text{eficaz}} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[I_R\left(t\right)\right]^2 dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[I_0 \ \text{sen}\left(\omega t - \phi\right)\right]^2 dt} = I_0\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[\text{sen}\left(\omega t - \phi\right)\right]^2 dt} \\ &= \frac{I_0}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{16}$$

Es decir, sabido el valor I_{eficaz}, podemos hallar la amplitud instantántea como $I_0 = \sqrt{2} I_{\text{eficaz}}$. Lo mismo vale para $\mathcal{E}_{\text{eficaz}}$:

$$\mathcal{E}_{\text{eficaz}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

Valor instantáneo y valor eficaz

Valor instantáneo y valor eficaz

Dada una función $A(t) = A_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, la relación entre su valor eficaz y su amplitud instantánea es

$$A_{\text{eficaz}} = \frac{A_0}{\sqrt{2}} \tag{18}$$

Potencia eficaz

De la expresión (15) $\langle P(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 I_0 \cos(\phi)$ podemos reemplazar los valores de amplitudes instantáneas por los eficaces (17) y (16) para tener una expresión parecida a la que teníamos en circuitos de corriente contínua:

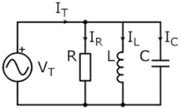
$$\langle P(t)\rangle = \mathcal{E}_{\text{eficaz}} I_{\text{eficaz}} \cos(\phi) \tag{19}$$

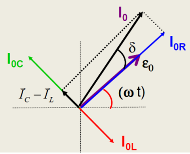
donde

$$\cos(\phi) = \frac{R}{Z}$$

es el *factor de potencia* del circuito.

RLC paralelo





- La corriente principal se divide en tres, una para cada elemento. La diferencia de potencial $\mathcal{E}(t)$ es lo que tienen todos los elementos en común. Se puede hace un análisis fasorial

$$I(t) = I_R(t) + I_C(t) + I_L(t) \tag{20}$$

- De la figura de las amplitudes de los fasores

$$I_0^2 = I_{R0}^2 + (I_{C0} - I_{L0})^2 = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_0}{X_C} - \frac{\mathcal{E}_0}{X_L}\right)^2$$
$$= \mathcal{E}_0^2\left[\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2\right] = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{Z_{\parallel}}\right)^2$$

es decir: $I_0 = \mathcal{E}_0/Z_{\parallel}$; en donde la impedancia para este caso es según

$$\frac{1}{Z_{\parallel}} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2} \tag{21}$$

- Además

$$\tan(\phi) = \frac{I_{C0} - I_{L0}}{I_{R0}} = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} \tag{22}$$

Preguntas

Preguntas