01.00. Herramientas matemáticas

Damián Gulich[1,2]

[1]Departamento de Ciencias Básicas,
Facultad de Ingeniería, UNLP

[2]Centro de Investigaciones Ópticas (CIOp)

Índice

Notación

Esto es un mero repaso de Matemática A y B. Usaremos la notación de vectores con flechas, por ser la más compatible con el estilo manuscrito.

- Dado un sistema de referencia O, decimos que $\vec{A}$ es un vector si es conjunto de tes números reales de la forma (cartesiana)

$$\vec{A} = \langle A_x; A_y; A_z \rangle \equiv A_x\, \check{i} + A_y\, \check{j} + A_z\, \check{k}$$

y se lo representa como una flecha desde O hasta el *punto* $(A_x; A_y; A_z)$. Si las componentes A_j tienen unidades, deben ser todas iguales y ésas serán las unidades del vector.

Norma y versor

- Su *norma* (longitud) es

$$\left\|\vec{A}\right\| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

- El *versor unitario* en la dirección de $\vec{A}$ es

$$\check{A} = \frac{\vec{A}}{\left\|\vec{A}\right\|} = \frac{\vec{A}}{A} = \left\langle \frac{A_x}{A}; \frac{A_y}{A}; \frac{A_z}{A} \right\rangle$$

y no tiene unidades.

Operaciones entre vectores

Si, respecto a un sistema de referencia O tenemos los vectores $\vec{A} = \langle A_x; A_y; A_z \rangle$ y $\vec{B} = \langle B_x; B_y; B_z \rangle$:

- Multiplicación por un escalar k:

$$k\,\vec{A} = \langle k\,A_x; k\,A_y; k\,A_z \rangle$$

- Suma y resta:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = \langle A_x \pm B_x; A_y \pm B_y; A_z \pm B_z \rangle$$

Productos entre vectores

- Producto escalar (da un escalar):

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\ &= A\,B\cos(\gamma)\end{aligned} \tag{1}$$

donde γ es el ángulo entre ellos.

- Producto cruz (da un vector):

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \langle A_yB_z - A_zB_y; -\left(A_xB_z - A_zB_x\right); A_xB_y - A_yB_x\rangle\end{aligned} \tag{2}$$

donde

$$\left\|\vec{A}\times\vec{B}\right\| = A\,B\,\mathrm{sen}\,(\gamma)$$

Campo escalar, vectorial y nabla

- Decimos que $V = V\left(x;y;z\right)$ es un campo escalar si a cada punto del espacio le asigna un número.
- Decimos que $\vec{F}\left(x;y;z\right)$ es un campo vectorial si

$$\begin{aligned}\vec{F}\left(x;y;z\right) &\equiv \left\langle F_x\left(x;y;z\right); F_y\left(x;y;z\right); F_z\left(x;y;z\right)\right\rangle \\ &\equiv \left\langle F_x; F_y; F_z\right\rangle \end{aligned} \tag{3}$$

donde en el último renglón para simplificar la escritura entendemos que cada componente es una función de las coordenadas. A cada punto del espacio le asigna un vector.
- Definimos el pseudovector nabla (∇) como un conjunto de operadores diferenciales ordenados:

$$\nabla \equiv \left\langle \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle \tag{4}$$

Este pseudovector no tiene módulo ni dirección pues sólo es una lista de operaciones a realizar.

Gradiente

- Dado un campo escalar $V(x; y; z)$, definimos su *gradiente* según:

$$\nabla V = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} V; \frac{\partial}{\partial y} V; \frac{\partial}{\partial z} V \right\rangle$$

Esto arroja como resultado una función **vectorial**.

Divergencia

- Dado un campo vectorial $\vec{F}(x; y; z)$ (ver (3)), definimos su *divergencia* según el producto escalar (Ec. (1)) entre ∇ (ver (4)) y $\vec{F}$:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z$$

Esto arroja como resultado una función **escalar**.

Rotor

- Dado un campo escalar $\vec{F}\,(x;y;z)$ (ver (3)), definimos su *rotor* (o *rotacional*) según el producto vectorial (Ec. (2)) entre ∇ (ver (4)) y $\vec{F}$:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Esto arroja como resultado una función **vectorial**.

Dos resultados importantes

1. *La divergencia del rotor es nula*:

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{F}\right) = 0 \qquad (5)$$

Esto nos permitirá detectar campos vectoriales que sean rotores de otros campos.

2. *El rotor de todo gradiente da cero*:

$$\nabla \times (\nabla V) = \vec{0} \qquad (6)$$

Esto nos permitirá detectar campos vectoriales que sean gradientes de funciones escalares.

Un resultado espantoso

También es válida la siguiente identidad: *"el rotor de rotor más nabla dos da el gradiente de toda divergencia"*:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{F}\right) + \nabla^2 \vec{F} = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{F}\right) \quad (7)$$

donde

$$\nabla^2 \vec{F} = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_x ; \ldots \right.$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_y ; \ldots$$
$$\left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} F_z \right\rangle$$

Flujo de un campo vectorial

Definiciones

Sea S una superficie y $\vec{F}$un campo vectorial. Definimos el flujo de $\vec{F}$ a través de S como:

$$\Phi_{\vec{F}}(S) = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_S \vec{F} \cdot \check{n}\, dA \tag{8}$$

Recuérdese que, por la definición de producto escalar (1),

$$\vec{F} \cdot d\vec{A} = \vec{F} \cdot \check{n}\, dA = \left\|\vec{F}\right\| \|\check{n}\| \cos(\gamma)\, dA = \left\|\vec{F}\right\| \cos(\gamma)\, dA$$

pues $\|\check{n}\| = 1$ y donde γ es el ángulo entre $\vec{F}$ y $\check{n}$.

Teorema de Gauss

Teorema

Sea Ω una región compacta del espacio y sea $\partial\Omega$ la superficie cerrada que la limita. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial diferenciable en esa región, entonces

$$\oiint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \left(\nabla \cdot \vec{F}\right) dV \tag{9}$$

Recuérdese que la parte izquierda de esta igualdad es $\Phi_{\vec{F}}(S)$, que es el flujo de $\vec{F}$ a través de $\partial\Omega$, (Definición 1).

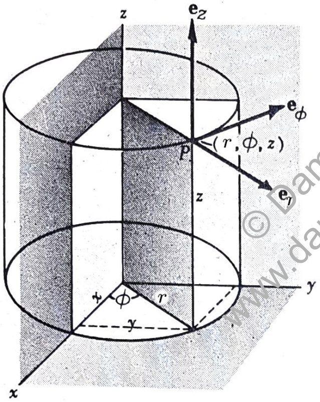
Teorema de Stokes

Teorema

Si Γ es una trayectoria cerrada, S es cualquier superficie cuyo borde es Γ y si $\vec{F}$ es un campo vectorial, entonces

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S} \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{A} \qquad (10)$$

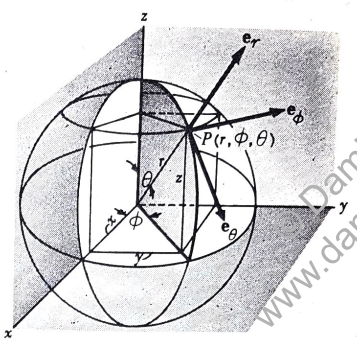
Coordenadas cilíndricas



- Coordenadas: r, ϕ, z $(r \geq 0,\ 0 \leq \phi < 2\pi,\ -\infty \leq z \leq \infty)$
- Versores: $\check{r},\ \check{\phi},\ \check{z}$
- Diferencial de volumen: $dV = r\,dr\,d\phi\,dz$
- Relación con las coordenadas cartesianas:

$$x = r\cos(\phi)$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,(\phi)$$
$$z = z$$

Coordenadas esféricas



- Coordenadas: r, ϕ, θ $(r \geq 0,\ 0 \leq \phi < 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi)$
- Versores: $\check{r},\ \check{\phi},\ \check{\theta}$
- Diferencial de volumen: $dV = r^2 \operatorname{sen}(\theta)\ dr\, d\theta\, d\phi$
- Relación con las coordenadas cartesianas:

$$x = r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi)$$
$$y = r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi)$$
$$z = r \cos(\theta)$$