

Problemas sobre Sección eficaz

Damian Gulich*
(DEPARTAMENTO DE FÍSICA - UNLP)

27 de junio de 2005

- 1) Un cometa (que podemos considerar puntual) de masa m se mueve en el campo gravitacional del Sol de masa M y radio R . ¿Cuál es la sección eficaz total para la caída del cometa en el Sol?
b) Una estrella de masa M y radio R se mueve con velocidad v a través de una nube de partículas de densidad de masa η . Si todas las partículas que chocan con la estrella son incorporadas a ella, demostrar que la masa de la estrella aumenta al ritmo

$$\frac{dM}{dt} = \eta v \left(1 + \frac{GM}{Rv^2} \right) \pi R^2$$

SOLUCIÓN:

- a) Estamos tratando con un potencial central de la forma

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

donde $k = GMm$. Por tratarse de un potencial central, el movimiento de la partícula está confinado a un plano. Por lo tanto, podemos escribir el problema en coordenadas polares. La lagrangiana en polares es de la forma

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}$$

Como $\partial L / \partial \theta = 0$, entonces $p_\theta = \partial L / \partial \dot{\theta} = mr^2 \dot{\theta} = \text{const}$. Además, $\partial L / \partial t = 0 = -dH/dt$, con lo cual $H = E = \text{const}$. La hamiltoniana es de la forma

$$H = E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

El impulso angular l tiene en todo momento el valor $l = mv_\infty \rho$, donde ρ es el parámetro de impacto. Si imponemos además que para un impacto contra el sol a lo sumo $r_{\min} = R$ y que al momento del impacto $\dot{r} = 0$

$$E = \frac{mv_\infty^2 \rho^2}{2R^2} - \frac{k}{R}$$

de donde puede despejarse ρ^2 como

$$\rho^2 = \left(E + \frac{k}{R} \right) \frac{2R^2}{mv_\infty^2} = \left(\frac{1}{2} mv_\infty^2 + \frac{GMm}{R} \right) \frac{2R^2}{mv_\infty^2} = \left(1 + \frac{GM}{Rv_\infty^2} \right) R^2$$

Todos los cometas que lleguen con parámetros de impacto menores a ρ colisionarán, y el resto no. Por lo tanto, la sección eficaz total para la caída del cometa en el Sol es

$$\boxed{\pi \rho^2 = \left(1 + \frac{GM}{Rv_\infty^2} \right) \pi R^2} \quad (1)$$

*d_gulich@yahoo.com

b) Desde el punto de vista de la estrella, hay una nube de cometas que se acercan con velocidad v , la interacción es puramente gravitatoria, y su sección eficaz es la calculada en (1). La cantidad de cometas que en un tiempo dt están contenidos en el cilindro de sección transversal $\pi\rho^2$ y de grosor vdt es

$$\eta v \pi \rho^2 dt$$

y representan el incremento dM en la masa del sol. La expresión para la tasa de cambio de la masa del sol es, por lo tanto:

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = \eta v \left(1 + \frac{GM}{Rv^2}\right) \pi R^2} \quad (2)$$

2) Hallar la relación entre las secciones eficaces en los sistemas LAB y CM para el problema de dispersión por un potencial central.

SOLUCIÓN:

Si la cantidad de partículas dispersadas es la misma en ambos sistemas de referencia,

$$\underbrace{\sigma(\theta) d\Omega}_{\text{LAB}} = \underbrace{\sigma(\chi) d\Omega'}_{\text{CM}}$$

Por consiguiente

$$\sigma(\theta) 2\pi \sin(\theta) d\theta = \sigma(\chi) 2\pi \sin(\chi) d\chi$$

de donde se puede despejar $\sigma(\varphi)$ como

$$\sigma(\theta) = \sigma(\chi) \frac{\sin(\chi) d\chi}{\sin(\theta) d\theta}$$

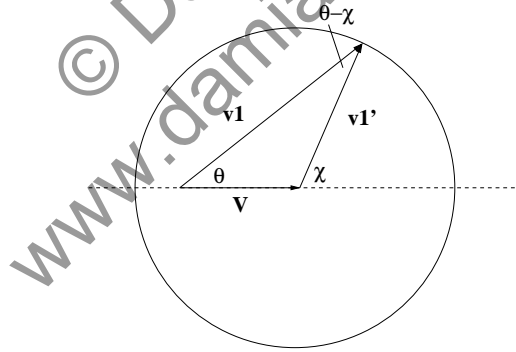


Figura 1: Problema 2.

De acuerdo con la figura, y aplicando el teorema del seno al triángulo: $V/\sin(\theta - \chi) = v_1'/\sin(\theta)$, y por lo tanto

$$\frac{\sin(\theta - \chi)}{\sin(\theta)} = \frac{V}{v_1'} = \frac{m_1}{m_2} = x \quad (3)$$

De donde se puede establecer que

$$\chi = \arcsin[x \sin(\theta)] + \theta \quad (4)$$

$$\cos(\chi - \theta) = \sqrt{1 - x^2 \sin^2(\theta)} \quad (5)$$

Para despejar $\frac{d\chi}{d\theta}$, En la ecuación (3) diferenciamos y recordamos el valor de x para obtener después de simplificar

$$\frac{d\chi}{d\theta} = \frac{\sin(\chi)}{\cos(\chi - \theta) \sin(\theta)}$$

de donde

$$\sigma(\theta) = \sigma(\chi) \frac{\sin(\chi)}{\sin(\theta)} \frac{\sin(\chi)}{\cos(\chi - \theta) \sin(\theta)} = \sigma(\chi) \frac{1}{\cos(\chi - \theta)} \left(\frac{\sin(\chi)}{\sin(\theta)} \right)^2$$

Si en (3) despejamos explícitamente $\sin \chi / \sin \theta$ en términos de x , obtenemos:

$$\frac{\sin(\chi)}{\sin(\theta)} = x \cos(\theta) + \cos(\chi - \theta)$$

Teniendo en cuenta además (5), la expresión para la sección eficaz deseada se puede despejar finalmente como:

$$\sigma(\theta) = \sigma(\chi) \frac{\left[x \cos(\theta) + \sqrt{1 - x^2 \sin^2(\theta)} \right]^2}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2(\theta)}} \quad (6)$$

6) Demstrar que la sección eficaz diferencial evaluada en el sistema de referencia del CM, para la dispersión de partículas por el potencial $U(r) = k/2r^2$, viene dada por la expresión:

$$d\sigma(\chi) = \frac{1}{\sin(\chi)} \frac{k}{2E} \left(\frac{\pi}{\chi} \right)^2 \frac{(\pi - \chi)}{(2\pi - \chi)^2} d\chi$$

donde E es la energía de la partícula dispersada.

SOLUCIÓN:

Se calcula el ángulo de dispersión en el potencial mediante

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|$$

donde

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho}{r \sqrt{r^2 \left[1 - \frac{U(r)}{E} \right] - \rho^2}} dr = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho}{r \sqrt{r^2 \left[1 - \frac{k}{2r^2 E} \right] - \rho^2}} dr = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho}{r \sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{2E} + \rho^2 \right)}} dr$$

Donde r_0 es la solución positiva de $r^2 - \left(\frac{k}{2E} + \rho^2 \right)$, es decir

$$r_0 = \sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2} \quad (7)$$

Se sabe que

$$\int \frac{dr}{r \sqrt{Ar^2 + Br + C}} = \frac{1}{\sqrt{-C}} \operatorname{sen}^{-1} \left[\frac{Br + 2C}{r \sqrt{B^2 - 4AC}} \right]$$

si $C < 0$ y $B^2 > 4AC$. En este caso, $A = 1$, $B = 0$ y $C = -\left(\frac{k}{2E} + \rho^2 \right)$, que obviamente lo cumplen. Por lo tanto,

$$\varphi_0 = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\rho}{r \sqrt{r^2 - \left(\frac{k}{2E} + \rho^2 \right)}} dr = \frac{\rho}{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}} \operatorname{sen}^{-1} \left[\frac{-2 \left(\frac{k}{2E} + \rho^2 \right)}{r \sqrt{4 \left(\frac{k}{2E} + \rho^2 \right)}} \right]_{r_0}^{\infty} = \frac{\rho}{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}} \operatorname{sen}^{-1} \left[\frac{-\left(\frac{k}{2E} + \rho^2 \right)}{r \sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}} \right]_{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}}^{\infty}$$

Lo cual da

$$\varphi_0 = \frac{\rho}{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}} \{ \text{sen}^{-1}(0) - \text{sen}^{-1}(-1) \} = \frac{\pi}{2} \frac{\rho}{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}}$$

Luego

$$\chi = \pi - \pi \frac{\rho}{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}} = \pi \left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\frac{k}{2E} + \rho^2}} \right) \quad (8)$$

La forma general de la sección eficaz en el CM era

$$d\sigma(\chi) = \frac{\rho}{\text{sen}(\chi)} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\chi$$

Resta ahora despejar ρ de la ecuación 8:

$$\begin{aligned} \frac{(\pi - \chi)^2}{\pi^2} \left(\frac{k}{2E} + \rho^2 \right) &= \rho^2 \implies \frac{k}{2E} + \rho^2 = \rho^2 \frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^2} \\ \rho(\chi) &= \sqrt{\frac{k}{2E}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^2} - 1}} \end{aligned} \quad (9)$$

Ahora,

$$\left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| = \sqrt{\frac{k}{2E}} \frac{1}{\left[\frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^2} - 1 \right]^{3/2}} \frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^3}$$

con lo cual podemos finalmente computar la sección eficaz diferencial deseada.

$$\begin{aligned} d\sigma(\chi) &= \frac{1}{\text{sen}(\chi)} \sqrt{\frac{k}{2E}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^2} - 1}} \sqrt{\frac{k}{2E}} \frac{1}{\left[\frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^2} - 1 \right]^{3/2}} \frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^3} d\chi \\ d\sigma(\chi) &= \frac{1}{\text{sen}(\chi)} \frac{k}{2E} \frac{1}{\left[\frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^2} - 1 \right]^2} \frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^3} d\chi = \frac{1}{\text{sen}(\chi)} \frac{k}{2E} \frac{(\pi - \chi)^4}{\left[\pi^2 - (\pi - \chi)^2 \right]^2} \frac{\pi^2}{(\pi - \chi)^3} d\chi = \\ &= \frac{1}{\text{sen}(\chi)} \frac{k}{2E} \frac{(\pi - \chi)}{[\pi^2 - \pi^2 + 2\pi\chi - \chi^2]^2} \pi^2 d\chi = \frac{1}{\text{sen}(\chi)} \frac{k}{2E} \frac{(\pi - \chi)}{\theta^2 [2\pi - \chi]^2} \pi^2 d\chi \end{aligned}$$

De donde finalmente

$$d\sigma(\chi) = \frac{1}{\text{sen}(\chi)} \frac{k}{2E} \left(\frac{\pi}{\chi} \right)^2 \frac{(\pi - \chi)}{(2\pi - \chi)^2} d\chi$$

que es lo que se quería demostrar.